Das Geburtstagsproblem

Stell dir vor, du bist auf einer Party. Neben dir sind noch 24 weitere Personen anwesend. Dann schlägt dir einer von ihnen eine Wette vor: Wenn mindestens zwei der anwesenden Personen am selben Tag Geburtstag haben, schuldest du ihm fünf Euro. Haben alle an einem anderen Tag Geburtstag, gibt er dir fünf Euro. Du überlegst dir, wie viele Menschen aus allen Personen, die du kennst, mit dir zusammen Geburtstag haben. Wie viele fallen dir ein? Eine, vielleicht zwei? Die Wahrscheinlichkeit, dass in eurer recht kleinen Gruppe zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben, erscheint doch ziemlich gering, schließlich gibt es 365 verschiedene Tage, an denen man Geburtstag haben kann. Die Wette sollte also leicht zu gewinnen sein, oder? Was meinst du? Würdest du die Wette eingehen?

Um die richtige Entscheidung zu treffen, beginnen wir mit ein paar einfachen Überlegungen. Lässt man Schaltjahre außen vor, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person an irgendeinem Tag des Jahres Geburtstag hat, 365/365 also 1 – schließlich muss sie an einem der 365 Tagen des Jahres Geburtstag haben.

Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person am ersten Januar Geburtstag hat, beträgt 1/365, da es sich um eine Möglichkeit aus 365 handelt. Auf der anderen Seite beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine weitere Person *nicht* am ersten Januar, also an irgendeinem anderen Tag, Geburtstag hat, 364/365, da nun noch 364 von 365 Tagen in Frage kommen. Nimmt man eine dritte Person hinzu, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie nicht am selben Tag wie eine der anderen beiden Personen Geburtstag hat, 363/365, da zwei Tage schon belegt sind.

Auf diese Weise kann die Wahrscheinlichkeit für viele weitere Personen ermittelt werden. Bei der 365sten Person beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie an einem anderen Tag als die vorherigen 364 Personen Geburtstag hat, 1/365, da nur noch ein Tag nicht vergeben ist. Die nächste Person muss am selben Tag wie eine der anderen Geburtstag haben, da alle Tage schon belegt sind.

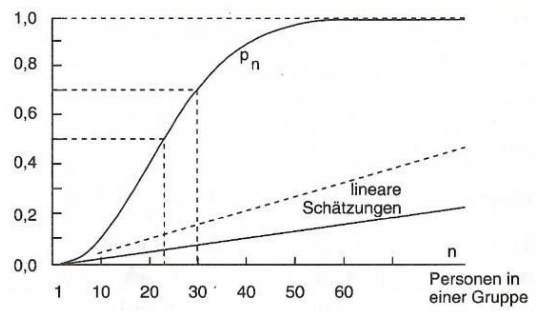
Geht man jetzt wieder von einer 25 Personen großen Gruppe aus, werden die 25 Einzelwahrscheinlichkeiten miteinander multipliziert. Dadurch erhält man die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass alle 25 Personen an einem anderen Tag Geburtstag haben:

$$p = \frac{365}{365} * \frac{364}{365} * \frac{363}{365} * \ldots * \frac{342}{365} * \frac{341}{365} = \frac{365*364*363*\ldots*342*341}{365^{25}} \approx 0{,}4313$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle 25 Personen an einem anderen Tag Geburtstag haben, beträgt also ungefähr 43,13%.

Die Gegenwahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Personen am selben Tag bzw. *nicht* alle 25 Personen an einem anderen Tag Geburtstag haben, liegt bei:
p = 1 - 0,4313 = 0,5687.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei der 25 Personen am selben Tag Geburtstag haben, liegt folglich bei 56,87%.

Probiert man weitere Gruppengrößen aus, erkennt man, dass diese Wahrscheinlichkeit schon bei 23 Personen größer als 50% ist. Bei einer Gruppe mit 41 Personen liegt siebereits über 90%, bei 57 Personen über 99%.



(von Randow, Gero (2012): Das Ziegenproblem Denken in Wahrscheinlichkeiten. Reinbeck: Rowohlt Taschenbuch Verlag)

Dies ist auch in der Graphik zu sehen. Sie stellt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Personen in einer Gruppe mit der Größe n am selben Tag Geburtstag haben (p_n), dar. Gekennzeichnet sind die Wahrscheinlichkeiten von 50%, 70% und 100%.

Kommen wir nun auf unsere Wette zurück. Oben haben wir herausgefunden, dass die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von 25 Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben, bei über 50% liegt. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass du die Wette verlierst, weil sich mindestens zwei Personen den Geburtstag teilen, größer als 50%. Folglich stehen deine Chancen, die Wette zu gewinnen, schlechter als die der anderen Person. Du solltest die Wette also lieber nicht eingehen, da es wahrscheinlicher ist, dass du verlierst, als dass du gewinnst. Jetzt wo du weißt, wie deine Chancen stehen, kannst du die Wette aber vielleicht selbst einmal jemandem vorschlagen. Dabei solltest du allerdings auf die Gruppengröße achten und bedenken, dass nicht alle Tage des Jahres als Geburtstag gleich wahrscheinlich sind, da zum Beispiel mehr Kinder im Sommer als im Winter zur Welt kommen, was in der Berechnung aber nicht berücksichtigt wird.

Die Fragestellung hinter der Wette wird aufgrund ihrer unerwarteten Antwort als Geburtstagsproblem oder Geburtstagsparadoxon bezeichnet. Es ist ein Beispiel dafür, wie bestimmte Wahrscheinlichkeiten von vielen falsch eingeschätzt werden. Man geht in diesem Fall davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben, ziemlich gering sein muss – besonders in einer nicht so großen Gruppe. Genau das Gegenteil ist aber der Fall. Ein Grund für die falschen Vermutungen ist, dass man bei einer solchen Fragestellung meist unbewusst nach der Wahrscheinlichkeit dafür sucht, dass der eigene Geburtstag mit dem eines oder einer anderen zusammenfällt, und nicht nach der Wahrscheinlichkeit dafür, dass irgendeine Person ihren Geburtstag mit einer anderen teilt. Diese gedachte Wahrscheinlichkeit ist tatsächlich relativ klein. Außerdem wird oft davon ausgegangen, dass die Wahrscheinlichkeit linear mit der Anzahl der Personen ansteigt, wie in der obigen Graphik zu sehen ist (lineare Schätzungen). Diese Annahme trifft allerdings, wie dort ebenfalls zu erkennen ist, nicht zu.Aus diesen Gründen unterliegen viele beim Geburtstagsproblem einem Irrtum.

Für Fortgeschrittene:

Eine weitere, kürzere Möglichkeit, die obige Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, bietet eine mathematische Formel. Bei der Herleitung dieser Formel wird zunächst dieselbe Rechnung wie oben verwendet:

$$p = 1 - \frac{365}{365} * \frac{364}{365} * \frac{363}{365} * \ldots * \frac{365-(n-1)}{365} = 1 - \frac{365*364*363*\ldots*(365-(n-1))}{365^n}$$

Dabei steht $\frac{365}{365}$ für die erste Person einer Gruppe mit der Größe n. $\frac{364}{365}$ bezeichnet dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zweite Person an einem anderen Tag als die erste Geburtstag hat. $\frac{363}{365}$ ist wiederum die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die dritte Person an einem anderen Tag als die erste und zweite Geburtstag hat. Die Reihe geht so weiter, bis man zur nten Person gelangt. Die Wahrscheinlichkeit für diese lässt sich mit $\frac{365-(n-1)}{365}$ berechnen. Für eine Gruppe mit der Größe n = 4 lässt sich diese Wahrscheinlichkeit also mit $\frac{365-(4-1)}{365} = \frac{362}{365}$ darstellen.

Die Rechnung lässt sich in einer Formel zusammenfassen:

$$p = 1 - \frac{365!}{365^n * (365-n)!}$$

Dabei steht 365^n für die Nenner der oben genannten Brüche zur Darstellung der einzelnen Wahrscheinlichkeiten. Um auch die Zähler in einer Formel darstellen zu können muss eine etwas aufwendigere Rechnung verwendet werden. 365! Beschreibt die Zähler für eine Gruppe von 365 Personen. Mit (365-n)! im Nenner kann dies nun auf eine Gruppe mit einer beliebigen Größe beschränkt werden. Dafür werden alle nicht benötigten Zähler von 365-n bis 1 heraus gekürzt, sodass nur noch die benötigten Zähler von 365 bis 365-(n-1) übrig bleiben. Auf diese Weise lässt sich durch die Formel die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass bei einer Gruppe der Größe n mindestens zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben.

Für 25 Personen ergibt sich:

$$p = 1 - \frac{365!}{365^{25} * (365-25)!} = 1 - \frac{365*364*363*\ldots*2*1}{365^{25}*340*339*338*\ldots*2*1} \approx 0{,}5687$$